Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

31/10/2016

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός: Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή μια απεικόνιση $\mathbb{N} \ni \nu \to \bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$, (συμβολικά: $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ ή $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ή $\bar{x}_\nu = (\underbrace{x_\nu^{(1)}, \dots x_\nu^{(n)}}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{N}$)

με όρους $\bar{x}_\nu$, συγκλίνει στο $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}$

αν $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

(Π.χ). Συχνά βλέπουμε τις ακολουθίες $(x_\nu, y_\nu) = (\frac{1}{\nu}, 0)$
$(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = (\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu})$ κλπ.

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Το όριο μιας ακολουθίας, αν υπάρχει, είναι μοναδικό

Απόδειξη: Έστω ότι έχω μια ακολουθία $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\bar{x}_\nu \to \bar{y}_0$, $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Από τον ορισμό έχουμε ότι $\left.\begin{array}{l}\exists \nu_1 \in \mathbb{N} \\ \forall \nu \geq \nu_1\end{array}\right\}: \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \frac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2}$ $(=:\varepsilon)$

και $\left.\begin{array}{l}\exists \nu_2 \in \mathbb{N} \\ \forall \nu \geq \nu_2\end{array}\right\}: \|\bar{x}_\nu - \bar{y}_0\| < \frac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2}$

$\Rightarrow \forall \nu \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}: \|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\| \leq \|\bar{x}_0 - \bar{x}_\nu\| + \|\bar{x}_\nu - \bar{y}_0\| < \|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|$

Άτοπο!

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \geq \nu_0): \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < 1$

(άρα πήρα για ε το 1)

$\Rightarrow (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \geq \nu_0): \|\bar{x}_\nu\| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| + \|\bar{x}_0\| < 1 + \|\bar{x}_0\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|\bar{x}_\nu\| \leq \max\{\|\bar{x}_1\|, \dots, \|\bar{x}\|_{\nu_0 - 1}, 1 + \|\bar{x}_0\|\}$

SOS!!!!

$\boxed{\text{Πρόταση - Άσκηση}}$: Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $\bar{y}_\nu \to \bar{y}_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι $\alpha\bar{x}_\nu + \beta\bar{y}_\nu \to \alpha\bar{x}_0 + \beta\bar{y}_0$

Απόδειξη: Θέλω νδο $\|\alpha\bar{x}_\nu + \beta\bar{y}_\nu - (\alpha\bar{x}_0 + \beta\bar{y}_0)\| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

Έχουμε $\underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\in\mathbb{R} \text{ και } \geq 0} \to 0$ και $\|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\| \to 0$

$$\|\alpha\bar{x}_\nu + \beta\bar{y}_\nu - (\alpha\bar{x}_0 + \beta\bar{y}_0)\| = \|\alpha(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) + \beta(\bar{y}_\nu - \bar{y}_0)\| \leq$$

$$\leq |\alpha| \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\downarrow \, 0} + |\beta| \underbrace{\|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\|}_{\downarrow \, 0} \longrightarrow 0$$

. Εδώ χρησιμοποιούμε την Άλγεβρα Ορίων Ακολουθιών στον $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Πρόταση (πολύ πρακτική)}}$: Έστω $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Αυτό ισοδυναμεί με : $\forall i, \dots n$: $x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_0^{(i)} \in \mathbb{R}$

[Πιο συντομία : $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty \to 0$]

Απόδειξη $(\Rightarrow)$: Θέλω νδο $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n : x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$]

$$\left.\begin{array}{l} \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \geq \nu_0) : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon \\ \text{όμως} \quad \forall i = 1, \dots, n : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \; (*) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n$

(*) Από τον ορισμό : $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|^2} \geq |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|$

Να σημειωθεί ότι έχουμε και $\underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty}_{= \max\{|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|\}} \to 0$

Πιο αναλυτικά : $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$, δηλαδή $\forall i = 1, \dots, n$ $|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{i=1,\dots,n} \{|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|\}}_{= \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty} \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \longrightarrow 0$$

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Μία ακολουθία συγκλίνει (η $\bar{x}_\nu \subset \mathbb{R}^n$) $\Longleftrightarrow$ η $(\bar{x}_\nu)$ είναι ακολουθία Cauchy, δηλαδή $(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N}): \forall \mu,\nu \geq \nu_0: \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$

[Αυτό σημαίνει ότι ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την ευκλείδεια απόσταση είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος]

<u>Απόδειξη</u>: $(\Rightarrow)$ $\exists \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n: \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \underset{\text{ορισμ.}}{\Longleftrightarrow} \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ \forall \nu \geq \nu_0: \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})\ \forall \nu,\mu \geq \nu_1: \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \|\bar{x}_\mu - \bar{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| + \|\bar{x}_0 - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon.$

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ ακολουθία Cauchy, δηλαδή:

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ \forall \nu,\mu \geq \nu_0: \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\|}_{\geq |x_\nu^{(i)} - x_\mu^{(i)}|\ (\geq 0)\ \forall i=1,\dots,n} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ η $(x_\nu^{(i)})$ στον $\mathbb{R}$ είναι ακολουθία Cauchy $\forall i=1,\dots,n \Rightarrow$

$\xRightarrow{\mathbb{R}\text{ πλήρης}} \exists x_0^{(i)} \in \mathbb{R}: x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)},\ \forall i=1,\dots,n \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0.$

($\Leftarrow$) Έχουμε $\forall i=1,\dots,n$ $x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_0^{(i)} \Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_i \in \mathbb{N}): \forall \nu \geq \nu_i : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\forall \nu \geq \max_{i=1,\dots,n}\{\nu_i\})$ ισχύει $|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n} \quad \forall i=1,\dots,n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon$

δηλαδή: $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$.

Επίσης, $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty \to 0 \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\bar{x}_\nu = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}, \dots, \frac{1}{\nu^n}\right)$

Εξετάστε αν η $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει και αν ναι, δώστε το όριό της.

<u>Λύση</u>: Αφού οι ακολουθίες $\frac{1}{\nu^i} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$, $\forall i=1,\dots,n$

Έχουμε (σύμφωνα με την πρόταση: $\underset{\bar{x}_\nu}{\bar{x}_\nu} \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_0^{(i)} \quad \forall i=1,\dots,n$)

$\bar{x}_\nu \to \bar{0} = (0,0,\dots,0)$

[πράγματι $\underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{=a_\nu} = \underbrace{\|\bar{x}_\nu\|}_{=a_\nu} = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\nu^n}\right)^2}}_{=a_\nu} \longrightarrow 0$

αφού $\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\nu^n}\right)^2 \longrightarrow 0$, το οποίο ακολουθεί από άλγεβρα ορίων στον $\mathbb{R}$.

Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: Κάθε φραγμένη ακολουθία(*) στον $\mathbb{R}^n$ έχει (τουλάχιστον) μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη:

(*) φραγμένη ακολουθία : $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \iff \exists c>0 : \|\bar{x}_\nu\| < C$.

Αφού $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)})$ είναι φραγμένη

έχουμε ότι $\forall i = 1, \dots, n$ $(x_\nu^{(i)})_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

είναι φραγμένη $[\,|x_\nu^{(i)}| \le \|\bar{x}_\nu\| \le C\,]$ $\xRightarrow[\text{στο } \mathbb{R}]{\text{Bolzano-Weierstrass}}$ $\forall i = 1, \dots, n$, $\exists \left(x^{(i)}_{k_\nu^{(i)}}\right) \subset \left(x_\nu^{(i)}\right)$

με $x^{(i)}_{k_\nu^{(i)}} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_0^{(i)}$

Όμως μπορεί να ισχύει $x_{\ell_\nu} \to x_0$

$y_{m_\nu} \to y_0$

όπου $(\ell_\nu) \subset (\nu)$, $(m_\nu) \subset (\nu)$, αλλά $(\ell_\nu) \neq (m_\nu)$
